

تتمة نماذج المكممات

$$\mathcal{L}_{16}: \exists x_i \left(\alpha(x_i) \vee \beta(x_i)\right) \equiv \left(\exists x_i\, \alpha(x_i) \vee \exists x_i\, \beta(x_i)\right)$$

من الممكن توزيع مكمم الوجود$\exists$ على الفصل$\vee$ وبالاتجاهين (تكافؤ).

يمكن كتابتها اختصاراً كما يلي : $\exists x_i\ (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x_i\, \alpha \vee \exists x_i\, \beta)$

البرهان :

يمكننا برهانها بأسلوب مشابه لبرهان $\mathcal{L}_{15}$. وذلك بإثبات صحة الاقتضاءين لكن يمكن برهانها بالاستفادة من صحة $\mathcal{L}_{15}$ وذلك ببضعة خطوات قليلة , كما يلي:

بالاستفادة من $\mathcal{L}_{15}$ و $\mathcal{L}_{12}$ وقانوني دي مورغان نجد :

$$\begin{aligned}\exists x_i\ (\alpha \vee \beta) &\equiv \neg\forall x_i\ \neg(\alpha \vee \beta) \equiv \neg\forall x_i\ (\neg\alpha \wedge \neg\beta)\\ &\equiv \neg(\forall x_i\ \neg\alpha \wedge \forall x_i \neg\beta) \equiv (\neg\forall x_i\ \neg\alpha \vee \neg\forall x_i \neg\beta)\\ &\equiv (\exists x_i\ \alpha \vee \exists x_i\ \beta)\end{aligned}$$

$$\mathcal{L}_{17}: \forall x_i\ \forall x_j\ \alpha \equiv \forall x_j\ \forall x_i\ \alpha$$

البرهان :

حسب $\mathcal{L}_2$ نجد: $\forall x_j\ \alpha \Longrightarrow \alpha$ وحسب $\mathcal{R}_3$ نجد $\forall x_i\left(\forall x_j\ \alpha \Longrightarrow \alpha\right)$

وبتطبيق $\mathcal{L}_{13}$ ومن ثم النزع نجد: $\forall x_i \forall x_j\ \alpha \Longrightarrow \forall x_i\ \alpha$

والآن حسب $\mathcal{R}_2$ حيث$\psi = \forall x_i \forall x_j\ \alpha$ لا تحوي x_j كمتحول حر , نجد:

$$\forall x_i \forall x_j\ \alpha \Longrightarrow \forall x_j \forall x_i\ \alpha$$

وبذلك نكون قد برهنا أول اقتضاء والاقتضاء الآخر يتم بنفس الأسلوب .

$$\mathcal{L}_{18}: \exists x_i\ \forall x_j\ \alpha \equiv \exists x_j\ \forall x_i\ \alpha$$

البرهان : بنفس أسلوب برهان $\mathcal{L}_{17}$ وذلك بالاستفادة من $\mathcal{L}_{14}$ و $\mathcal{L}_1$ و $\mathcal{R}_1$

يمكن كتابة $\mathcal{L}_{17}$ كما يلي: $\forall x\ \forall y\ \alpha(x,y) \equiv \forall y\ \forall x\ \alpha(x,y)$ ونحن كنا قد أشرنا إلى صحة ذلك عند إيرادنا لخواص المكممات وذكرنا أيضاً أن $\exists x\ \forall y\ \alpha(x,y) \not\equiv \forall y\ \exists x\ \alpha(x,y)$

في الحقيقة إن التكافؤ غير محقق لكن أحد الاقتضاءين صحيح والذي هو $\exists x\ \forall y\ \alpha(x,y) \Longrightarrow \forall y\ \exists x\ \alpha(x,y)$ بيد أن الاقتضاء المعاكس غير صحيح بالضرورة وأوردنا مثالاً على ذلك في المحاضرة السابعة .

رأينا أيضاً أنَّ

$$\forall x_i\ (\alpha \wedge \beta) \equiv (\forall x_i\ \alpha \wedge \forall x_i\ \beta)$$



$$\exists x_i \; (\alpha \vee \beta) \equiv (\exists x_i \; \alpha \vee \exists x_i \; \beta)$$

من الممكن توزيع مكمم الشمول ∀على الوصل ∧ وبالاتجاهين (تكافؤ).

من الممكن توزيع مكمم الوجود ∃ على الفصل ∨ وبالاتجاهين (تكافؤ).

هل من الممكن توزيع مكمم الشمول ∀على الفصل∨ , وتوزيع مكمم الوجود ∃ على الوصل∧ ؟

في الحقيقة نعم يمكن ذلك لكن باتجاه واحد فقط

أي

$$(\forall x_i \; \alpha \; \vee \; \forall x_i \; \beta) \Longrightarrow \forall x_i \; (\alpha \vee \beta)$$
$$\exists x_i \; (\alpha \wedge \beta) \Longrightarrow (\exists x_i \; \alpha \; \wedge \; \exists x_i \; \beta)$$

والعكس لكل من الاقتضاءين غير صحيح بالضرورة.

أورد مثالاً يبين أن العكس غير صحيح بالضرورة .

بهذا القدر نكتفي من منطق المكممات, والآن سنأتي إلى منطق الدرجة الأولى .

~~~~.~~~~.~~~~.~~~~.~~~~.~~~~.~~~~.~~~~.~~~~.~~~~.~~~~.~~~~.~~~~.~~~~.~~~~.~~~~.~~~~

لغة (منطق) الدرجة الأولى First Order Language (Logic) أو اختصاراً FOL

مقدمة:

إنه من غير المفيد أن نستخدم الاسناديات فقط من أجل بناء نظام يقتصر على كتابة صيغ رياضية ومعرفة صحتها من خطئها أو حتى استنتاج قضية ما .

لكن يمكن استخدامها في بعض الأحيان أيضاً من خلال وضع بنى (Structure) رياضية متكاملة الهدف منها تعميم (تجريد) مفاهيم رياضية , مثل الزمر , الحلقات ,الحقول والعديد من البنى الأخرى

سنقوم الآن بدراسة ما يسمى اللغة من الدرجة الأولى FOL , ووضع معايير لما يمكن (أو لا يمكن) التعبير عنه باستخدام منطق الدرجة الأولى .

مثال توضيحي عن بناء الأعداد الحقيقية نحن بحاجة لما يلي :

1- مفهوم العدد الحقيقي أي نحن بحاجة لمتحولات لتمثيل الأعداد الحقيقية : $x, y, z, t, u, \dots$ أو $v_0, v_1, v_2, \dots$

2- رموز خاصة , من أجل أعداد حقيقية معينة (محددة- specific) مثل : $0, 1, \pi, e, \dots$

3- رمز للتعبير عن حقيقة كون عددين حقيقيين متساويين أم لا.

4- تابع يقوم بجمع عددين حقيقيين ليعطيني عدد حقيقي جديد $(x, y) \longmapsto +(x, y)$

جرت العادة أن نضع $(x + y)$ بدلاً من $+(x, y)$ وأيضاً جرت العادة إزالة الأقواس أي $x + y$

5- تابع يعطيني معكوس عدد حقيقي $x \longmapsto -x$

6- رمز لعلاقة مقارنة عددين حقيقيين (أكبر أو أصغر) $\leq$

7- رموز خاصة للتعبير عن جمل رياضية مثل من أجل كل ∀ , يوجد ∃

إذا جمعنا كل الرموز السابقة بالإضافة إلى الدوال نحصل على ما يسمى منطق(لغة) الدرجة الأولى الخاصة بالأعداد الحقيقية.
~~~~



يمكن بطريقة مماثلة تعريف FOL الخاصة بالزمر والحلقات والجبر البولياني

ففي الزمر نحن بحاجة إلى ما يلي :

رموز متحولات ورمز لتابع ثنائي (بمتحولين) ليمثل العملية الداخلية ورمز خاص لتوصيف العنصر الحيادي $e, 1, 0$

مما سبق نستنتج أنه من الواضح أنه لي من المناسب استخدام نفس اللغة مع جميع البنى التي نقوم بدراستها ولهذا السبب سوف نقدم تعريفاً شاملاً يضم جميع المفاهيم السابقة بشكل عام .

تعريف لغة الدرجة الأولى

هي كل مجموعة مؤلفة من الكائنات الرياضية التالية :

1- مجموعة $\mathcal{V}$ من المتحولات (يفضل أن تكون عدودة)
2- مجموعة من الرموز المتعلقة بالروابط المنطقية $\neg, \wedge, \vee, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow, \top, \bot$
3- رموز المكممات: الشمول $\forall$ والوجود $\exists$
4- مجموعة $\mathcal{C}$ (من الممكن أن تكون خالية) من الرموز الثابتة مثل $0, 1, \boldsymbol{i} = (0,1), \ldots$
5- مجموعة (من الممكن أن تكون خالية) من رموز التوابع مثل : $f, g, h, +, \cdot, \ldots$
6- مجموعة (من الممكن أن تكون خالية) من رموز العلاقات: $\leq, R, P, \ldots$
7- رموز الأقواس)و(, و رمز الفاصلة ,

سنعتبر أن جميع الرموز المنطقية الخاصة بلغة الدرجة الأولى هي الروابط المنطقية والمكممات بالإضافة إلى الأقواس والفاصلة والمتحولات وجميع الرموز الأخرى تكون متعلقة باللغة المدروسة وتدعى رموز غير منطقية (Non logic).

يمكن كتابة لغة الدرجة الأولى كما يلي :

$$\mathcal{L} = \mathcal{V} \cup \mathcal{C} \cup \{\neg, \vee, \wedge, \Longrightarrow, \Longleftrightarrow, \top, \bot\} \cup \{\forall, \exists\} \cup \{\mathcal{R}_n\}_{n \in \mathbb{N}} \cup \{\mathcal{F}_n\}_{n \in \mathbb{N}}$$

حيث $\mathcal{V}$ مجموعة المتحولات و$\mathcal{C}$ مجموعة الثوابت و$\mathcal{R}_n$ علاقات بـ n مسقط و$\mathcal{F}_n$ دوال بـ n مسقط .

.: انتهت المحاضرة العاشرة :.